

# 第一届 TI-Nspire™ 手持技术创新思维解题大赛 竞赛试题

试卷共 10 道题，每题 10 分，满分 100 分。

## A 卷

本卷共 6 道题，每题 10 分，共计 60 分。

1. 解下列方程：

- (1)  $2^x = x^2$  (精确到 0.0001 即可)；
- (2)  $2^x = x^{1000}$  (精确到 0.0001 即可)。

2. 有学生在研究函数  $y = a^x$  与  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 图象的交点个数时，居然发现当  $a$  属于一定范围时，它们可以有三个不同交点。如果这是真的，你能利用 TI-Nspire 图形计算器尝试找出这个范围吗？（允许误差  $\pm 0.002$ ）

3. 曲线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 与圆  $(x-2)^2 + y^2 = 3$  在第一象限交于 A、B 两点，线段 AB 的中点在直线  $y = x$  上，求实数  $p$  的值。（精确到 0.01）

4. 已知方程：  $(x^2 - 5 \times 5)^{(x^2 - 9 \times 20)} = 1$  .
- (1) 找到该方程的实数解；
  - (2) 如何证明该方程没有其他实数解？

5. 已知正方形 OABC，顶点 O，A，B 坐标分别为 (0, 0)，(2, 0) 和 (2, 2)。M 是 CB 的中点，N 是 BA 的中点。

(1) 证明：OM 和 CN 垂直，垂足为 K，且 AK 的长度等于正方形的边长；

(2) 分别求出  $\triangle CKM$  和四边形 OKNA 的外接圆方程。如果 H 是这两个圆的第二个交点，请你分别用代数的方法和几何的方法去证明直线 HK 一定经过 B。

9. 我们已经学习过反比例函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ ，它有如下的图象性质：

函数	渐近线	对称中心
$f(x) = \frac{1}{x}$	直线 $x = 0$ 直线 $y = 0$	(0,0)

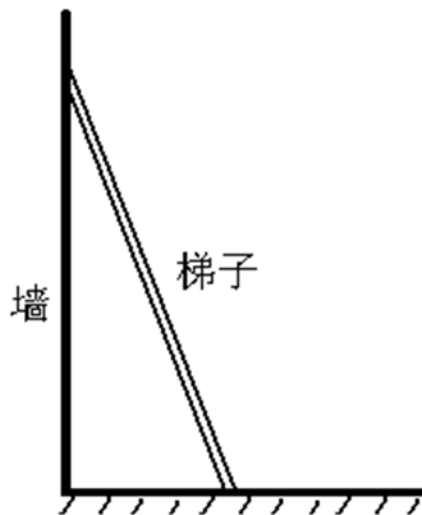
类比研究函数  $f(x) = \frac{1}{b^x + a}$  ( $a > 0, b > 0, b \neq 1$ ) 的图象性质：

函数	渐近线	对称中心
$f(x)$		

## B 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分.

7. 已知两个不同的正整数  $x$  和  $y$ ，且  $x > y$ .
- (1) 找到  $x$  和  $y$ ，使其平方差是 21；
  - (2) 找到  $x$  和  $y$ ，使其平方差是 329509；
  - (3) 是否存在满足条件的  $x$  和  $y$ ，它们的平方差是 210？证明你的判断.
8. 长度为  $l$  的梯子靠在墙上，梯子底部离墙的距离为  $a$  ( $0 < a < l$ )，一个冒险者站在梯子的顶端，如下图所示. 当冒险者在梯子的顶端时，梯子的底部开始以稳定的速度  $v$  滑离其初始位置，造成梯子的下降. 假设梯子一直紧靠着墙，试用代数及图形的方式来描述冒险者随着梯子下降的路径，并由此决定在什么时候，冒险者跌落的速度最快.



## C 卷

本卷共 2 道题，每题 10 分，共计 20 分。

### 9. 饮料罐设计



某个饮料罐的容积大小为 330 毫升。这种罐一般是高度约 115 毫米，直径约 66 毫米，这样的一种标准尺寸，是否就是最优的设计呢？

- (1) 请计算出你认为的最佳尺寸。列出你的任何假设，并解释你的方案为什么正确；
- (2) 如果标准尺寸不是最佳的，请解释为什么现在仍然被采用。

## 10. 过山车挑战



过山车 (Roller coaster, 又称为云霄飞车), 是一种机动游乐设施, 常见于游乐园和主题乐园. 一个基本的过山车构造中, 包含了爬升、滑落、倒转等. 过山车是一项富有刺激性的娱乐工具, 那种风驰电掣、有惊无险的快感令不少人着迷, 过山车虽然惊悚恐怖, 但却是非常有安全保障的设施.

你的任务是设计一个超炫的过山车, 至少使用 5 个函数模型, 从以下 5 个类型中选择:

① 一次函数; ②二次函数; ③三次或四次函数; ④指数函数; ⑤三角函数.

设计要求:

- (1) 为了简化问题, 过山车只要求设计成平面图形;
- (2) 你可以使用任何这些函数类型超过一次, 但在你的最终解决方案中, 必须包含以上所有不同的函数类型. 您也可以使用参数方程来表达你的解决方案;
- (3) 虽然是令人兴奋的乘车需要, 它也必须是安全的. 这意味着, 每个不同的函数图形之间的过渡必须是平滑和连续的, 你必须仔细地证明每个过渡达到了这个要求;
- (4) 过山车的总长度不得超过 500 米, 最大高度小于 120 米;
- (5) 必须提交一个 tns 格式的图形文件, 动态的、清楚的来描述一件事: 你的模型是如何满足以上所有要求的.